2024-S1 「社会・経済系の統計物理学入門」講義メモ

Takashi SHIMADA

2024 年 4 月 8 日

1 ミクロカノニカル分布とカノニカル分布

1.1 お金の分配モデルで理解する

講義のタイトルに対応させて、統計力学の標準的な教科書で物質系の一番簡単な系として最初に登場する（古典/量子）理想気体の代わりに、ここでは「N 人から成る（孤立した）社会におけるお金の分配」という問題でミクロカノニカル分布とカノニカル分布の関係を見てみよう[1]。社会全体に総額 E[円] のお金が流通しているとする。この社会について、以下の「ミクロカノニカル分布」を考えよう。

- 各人のお金保有額 x_i $\left(\sum_{i=1}^{N} x_i = E\right)$ を指定すると富の分配の**微視的状態** $\{x_i\}$ が一意に定まる。
- この微視的状態が等しい確率で実現される分布を考える、というのが**等重率の仮定**である。

各微視的状態が実現される確率が等しいとしたので、以後の取り扱いでは注目した条件に対応する微視的状態の数が重要になる。まず、「社会全体でのお金の総額が E[円] 以下の状態の数」を $\Omega_0(N,E)$ と書くと、これは N 次元角錐（単体）$\sum_{i=1}^{N} x_i \leq E,\ (x_i > 0)$ の体積なので[2]、

$$\Omega_0(N,E) = \frac{E^N}{N!} \tag{1}$$

である。ここから、N 人の社会全体のお金の総額が $(E, E+\delta E)$ の範囲にある状態の数 $W_N(E)$ は

$$W_N(E) = \frac{\partial \Omega_0(N,E)}{\partial E}\delta E = \frac{E^{N-1}}{(N-1)!}\delta E \tag{2}$$

となる。$W_N(E)$ を「お金総額 E に対応する状態数」、$\Omega_N(E) = \frac{E^{N-1}}{(N-1)!}$ を「お金総額 E に対応する状態密度」と呼ぶ。δE は小さいと言う範囲でどうとっても良いように話は進むので、新しい仮定やパラメターがここで増えたと思う必要は無い。

---

[1] これは久保亮五の統計力学 (1952) にも “経済学にもあまり役立たぬたとえ話はここらでやめにして...” という扱いで取り上げられる古典的な話でもある。講義で紹介するように、実データに照らしてみるとむしろこのコメントが控えめに過ぎると言うべきかもしれない。

[2] お金の総額 E が少ない場合はこの領域に含まれる格子点の数はちょっとずれるが、$E \gg 1$ の時を考えるので体積で置き換えて差し支えない。

次に、社会を $N_1 \gg 1, N_2 \gg> 1$ $(N_1 + N_2 = N)$ の 2 つの集団 1, 2 に分けて、これらの集団へのお金の分配の様子を考える。社会全体はミクロカノニカル分布に従うとしたので、集団 1 に総額 E_1、集団 2 に総額 E_2 のお金が所有される確率は

$$P(E_1, E_2) = CW_{N_1}(E_1)W_{N_2}(E_2) = C\frac{E_1^{N_1-1}E_2^{N_2-1}}{(N_1-1)!(N_2-1)!} \tag{3}$$

である。定積分の公式

$$\int_0^1 x^n(1-m)^m dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} \tag{4}$$

を使うと、1 系に分配されるお金の総額の期待値

$$\langle E_1 \rangle = E_t \left(\frac{N_1}{N_1 + N_2} \right) \qquad (E_t = E_1 + E_2) \tag{5}$$

とそのゆらぎ

$$\frac{\sqrt{\langle (E_1 - \langle E_1 \rangle)^2 \rangle}}{\langle E_1 \rangle} \sim \sqrt{\frac{N_2}{N_1}}\frac{1}{\sqrt{N}} \tag{6}$$

が計算できる。つまり、お金は両集団に人数比例で等分配され、等分配からの揺らぎは大きな集団間では非常に小さくなる。

注目した集団 1 について、構成人数は十分多いものの考えている社会全体からみると非常に小さい：$1 \ll N_1 \ll N_2$ という状況を考えると、この注目系が各微視的状態をとる確率が E_1 に対して重みのついたカノニカル分布になることが分かる（講義で説明するが自分でも計算してみよう）。

1.2 エントロピー最大化分布として理解する

上記の等重率の原理とカノニカル分布は、情報論的エントロピー：

$$S = -\sum_i p_i \ln p_i \tag{7}$$

を最大化する分布としてとらえることもできる。

Lagrange の未定乗数法を用いて、拘束条件が p_i 確率分布であるための $\sum_i p_i = 1$ 以外に無い場合は一様分布（等重率）：$p_i = \frac{1}{W}$（W は全状態数）がエントロピーを最大にする分布として求まる。また同様に、注目している量の期待値についての拘束条件：$\sum_i E_i p_i = \langle E \rangle$ がある場合にエントロピーを最大化する分布はカノニカル分布である（これも難しく無いので自分で確認してみよう）。

物理系でのエネルギーやお金分配モデルの例でのお金の総額などの保存量から来る拘束条件以外には、微視的状態への分布について何も偏りを仮定しないという原理は両者で一緒である。この仮定や、そもそも系の微視的状態の指定の仕方が正しかったかどうかは巨視的な観測結果などと比べてよくよく確認しなければいけない。これは経済、社会系についてはすぐに気になるだろうが実は物質系でも問題は同じで、他のどんな科学の仮説より厳しく繰り返し、といっていいほど検証がなされた結果として統計力学の原理として採用されている[3]。

[3]平衡状態についての統計力学がごくたまにでも間違う、などということがあったら、この講義メモの組版もみなさんが PDF ファイルを無事に見ることもほぼ期待できない。

2 感染症の代表的コンパートメントモデル

伝搬・感染現象の相転移の例として扱うネットワーク上のプロセスの前に、感染症の基本的なモデルであるコンパートメントモデル（人と人の接触を平均場的に扱う）について、代表的なものとその振る舞いを確認しておく。

2.1 SI モデル

SI (Susceptible-Infectious) モデル:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\alpha S I, \\ \dot{I} &= \alpha S I. \qquad (S + I = 1) \end{aligned} \tag{8}$$

は非線形ながら変数分離形の常微分方程式：$\dot{I} = \alpha I(1 - I)$ なので、これを解いて

$$I(t) = \left[1 + \left(\frac{1 - I_0}{I_0}\right) e^{-\alpha t}\right]^{-1} \tag{9}$$

を得る。これより、パラメタや初期条件に依らず終状態は $\lim_{t \to \infty} (S(t), I(t)) = (0, 1).$

2.2 SIS モデル

感染状態 (I) から健康状態 (S) への回復過程を入れた SIS モデル：

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\alpha S I + \beta I, \\ \dot{I} &= \alpha S I - \beta I. \qquad (S + I = 1) \end{aligned} \tag{10}$$

も同様に変数分離形の常微分方程式 $\dot{I} = I\left[(\alpha - \beta) - \alpha I\right]$ なので、これを解いて

$$I(t) = \frac{1 - \mathcal{R}_0^{-1}}{1 + \left[\dfrac{\left(1 - \mathcal{R}_0^{-1}\right) - I_0}{I_0}\right] e^{-\beta\left(1 - \mathcal{R}_0^{-1}\right)t}} \qquad \left(\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha}{\beta}\right) \tag{11}$$

を得る。ここで $\mathcal{R}_0$ は感染した患者が感染拡大に最適の環境 $S = 1$ のもとで治るまでに何倍の感染者を生むかに対応するパラメターなので**基本再生産数**と呼ばれる。終状態は初期状態に依らずこのパラメタに応じて決まり、特に $\mathcal{R}_0 = 1$ が感染が収まるかどうかの境になる(確認してみよう)：

$$I(\infty) = \begin{cases} 0 & : \mathcal{R}_0 < 1 \quad \text{(disease-free)} \\ 1 - \mathcal{R}_0 & : \mathcal{R}_0^{-1} > 1 \quad \text{(endemic)} \end{cases} \tag{12}$$

2.3 SIR モデル

感染状態 (S) から免疫獲得状態 R への回復過程[4]を入れた SIR モデル：

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\alpha SI, \\ \dot{I} &= (\alpha S - \beta)\, I \qquad (S+I+R=1) \\ \dot{R} &= =\beta I\end{aligned} \tag{13}$$

は 2 自由度の連立常微分方程式になり、解の表式が少し複雑になる。但し、$S-I$ 平面でのヌルクライン

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_S &: \quad S=0, \quad I=0 \\ \mathcal{N}_I &: \quad S=\mathcal{R}_0^{-1}, \quad I=0\end{aligned} \tag{14}$$

や解軌道の方向の関係式

$$\frac{dI}{dS} = \frac{1}{\mathcal{R}_0 S} - 1 \tag{15}$$

などより、定性的に

- $S(t)$ は時間と共に単調減少、$R(t)$ は単調増加
- $\mathcal{R}_0 > 1$ の場合には $I(t)$ がピークを持つ（感染の流行期）こと、
- パラメタに依らず終状態では感染者 0：$\lim_{t\to\infty}(S(t),\ I(t),\ R(t)) = (1-R_\infty,\ 0,\ R_\infty)$

が容易に分かる**(確認してみよう)**。また、もう一つの関係式

$$\frac{dS}{dR} = -\mathcal{R}_0 S \tag{16}$$

より、$S(t)$ と $R(t)$ についての関係式（陰的な解）

$$S(t) = S_0 e^{-\mathcal{R}_0(R(t)-R_0)} \tag{17}$$

が求まり、上記の終状態を指定する R_∞ もこの式から得られる再帰的方程式

$$S_\infty = 1 - R_\infty = S_0 e^{-\mathcal{R}_0(R_\infty - R_0)} \tag{18}$$

の解として得られる。この再帰的方程式は確かに $R_\infty \le R_0$ の範囲に唯一の解を持つ**(確認してみよう)**。

2.4 SIRS モデル

免疫獲得状態 R への回復過程に加えて免疫の喪失過程[5]（$R \to S$）も入れたモデル[6]：

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\alpha SI + \gamma R, \\ \dot{I} &= (\alpha S - \beta)\, I \qquad (S+I+R=1) \\ \dot{R} &= =\beta I - \gamma R\end{aligned} \tag{19}$$

ではどうなるか、これまでと同様の手法を使って定性的に考えてみよう。

[4] 免疫状態を死亡とみなしてもモデルとしては一緒
[5] もしくは、免疫を持たない新しい世代との交代
[6] 感染症のモデルとしては $\beta > \gamma$、特に $\beta \gg \gamma$ が想定される。

3　一般化ランダムグラフにおける感染クラスターのサイズ分布

人-人のつながり構造のモデルとして、以下ではランダムネットワークを採用して感染・伝搬過程を計算してみよう。少し数式が続くが、これは最も扱いが簡単な系である。

3.1　離散確率分布の母関数

ランダムネットワークのクラスターサイズなどの計算では、母関数を用いるのが便利である。その準備として母関数の性質について簡単にまとめておこう。

3.1.1　母関数の定義

離散確率変数（$X = 0, 1, 2, \cdots$）の確率分布 $P(X)$ について、

$$G(x) = \sum_{X=0}^{\infty} P(X) x^X \quad (|x| \leq 1) \tag{20}$$

を（確率）母関数 (generating function) という。確率分布の特性関数のときと同様、$G(x)$ は $P(x)$ についての情報を全て持つ。

3.1.2　母関数の一般的性質

(i). $P(X)$ は確率分布なので上の範囲で絶対収束する（特異性無し）。

(ii). $G(0) = \sum_{X=0}^{\infty} P(X) 0^X = P(0)$ ($0^0 = 1$ を採用)。

(iii). $G(1) = \sum_{X=0}^{\infty} P(X) = 1.$

(iv). 確率分布の線型和の分布 $P(X) = pP_1(X) + (1-p)P_2(X)$ $(0 \leq p \leq 1)$ の母関数は母関数の線型和：$G(x) = pG_1(x) + (1-p)G_2(x)$

(v). 独立な確率変数の和：$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ の母関数は積になる：$G(x) = \prod_{i=1}^{n} G_i(x)$

(vi). 畳み込み：$P(X) = \sum_{Z=0}^{X} P_1(Z) P_2(X-Z)$ の母関数も積：$G(x) = G_1(x) G_2(x)$

(vii). モーメント：$\langle X^n \rangle = \left[\sum_{X=0}^{\infty} X^n P(X) x^X \right]_{x=1} = \left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^n G(x) \right]_{x=1}$

(viii). $P(X \to 大) \sim X^{-\gamma} \ \leftrightarrow \ G(x \to 1) \sim 1 + C(1-x)^{\gamma-1}$

3.2　次数分布の母関数

ここからはランダムネットワークについて考える。以下では、ランダムに選ばれたノードの次数分布（そのネットワークの次数分布）を $P(k)$、その母関数を

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k) x^k \tag{21}$$

と表記する。前述のモーメントの式より、平均次数などの母関数を用いた表式は以下のようになる。$\langle k \rangle = G_0'(1)\ (\equiv \langle n_1 \rangle)$, $\langle k^2 \rangle = G_0'(1) + G_0''(1)$ $\sigma_k^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = G_0'(1)\left[1 - G_0'(1)\right] + G_0''(1)$.

3.3　隣接ノードと次近接ノード数の母関数

任意に抽出したノードの次数分布が $P(k)$ のとき、**任意に抽出したエッジの片端のノード**の次数分布は（エッジの数に比例した抽出確率を考えて）$Q(k) = \dfrac{kP(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} kP(k)} = \dfrac{kP(k)}{\langle k \rangle}$ である。したがって、ランダムに選んだエッジの先のノードから（そのエッジの帰り道を除いて）出て行く次数の分布の母関数は

$$G_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(k+1)P(k+1)}{\langle k \rangle} \right) x^k = \frac{G_0'(x)}{\langle k \rangle} = \frac{G_0'(x)}{G_0'(1)} \tag{22}$$

サイクルが無視できるとすると、次近接ノードの数は上の $G_1(x)$ で扱う分布の起点ノード分布の次数分の和であるから、その分布の母関数は

$$G_0^{(2)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k) [G_1(x)]^k = G_0\left(G_1(x)\right), \tag{23}$$

よって次近接ノード数の期待値は

$$\langle n_2 \rangle = \left[x \frac{d}{dx} G_0^{(2)}(x) \right]_{x=1} = G_1'(1) G_0'(G_1(1)) = G_0''(1) \tag{24}$$

3.4　l 次近接ノード数

式 (23) の導出過程をそのまま繰り返すことで、サイクルの寄与を無視した場合の l 次近接ノード数の分布の母関数は

$$G^{(l)}(x) = G_0 \left(\overbrace{G_1(G_1 \cdots G_1(G_1(}^{\text{入れ子 } (l-1) \text{ 個}} x)) \cdots) \right) \tag{25}$$

となる。よって、l 次近接ノード数の期待値は

$$\langle n_l \rangle = \left[\frac{d}{dx} G_0 \left(\overbrace{G_1(\cdots G_1(}^{(l-1) \text{ 個}} x)) \cdots) \right) \right]_{x=1} = G_0'(1) \left[G_1'(1) \right]^{l-1} = \langle n_1 \rangle \left(\frac{\langle n_2 \rangle}{\langle n_1 \rangle} \right)^{l-1} \tag{26}$$

となる**（以上を自分で計算して確認してみよう）**。

3.5　連結クラスターの平均サイズ

任意に**抽出したエッジの先の**クラスターのサイズ分布の母関数を H_1 とすると、これはエッジの端点のノード数を１足す分の x も勘定して、

$$H_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} xR(k)\Big[H_1(x)\Big]^k = xG_1\left(H_1(x)\right) \tag{27}$$

という再帰的な条件を満たす。よって、このクラスターサイズの期待値は

$$H_1'(1) = G_1\left(H_1(1)\right) + G_1'\left(H_1(1)\right)H_1'(1) = 1 + G_1'(1)H_1'(1) \tag{28}$$

より

$$H_1'(1) = \frac{1}{1 - G_1'(1)}. \tag{29}$$

となる。

任意に**抽出したノードの属する**クラスターのサイズの母関数 H_0 は、再び出発点のノード数を１足す分の x も勘定して、

$$H_0(x) = \sum_{k} xP(k)\Big[H_1(x)\Big]^k = xG_0\left(H_1(x)\right) \tag{30}$$

と書ける。これよりクラスターサイズの期待値は

$$\langle s\rangle = H_0'(1) = G_0(H_1(1)) + G_0'(H_1(1))H_1'(1) = 1 + \frac{G_0'(1)}{1 - G_1'(1)} \tag{31}$$

と計算される。すなわち、

$$G_1'(1) = 1 \tag{32}$$

が、次数相関の無い任意の次数分布のネットワークに対するクラスターサイズ[7]発散（$\sim (1 - G_1'(1))^{-1}$）の条件ということが分かる。つまり、ここがこのネットワークにおけるパーコレーション転移点である。

以上は臨界点に下から迫った場合の計算だが、$G_1'(1) \geq 1$ の場合も母関数の方法は有効である。この場合については 3.7 を参照のこと。

3.6　連結クラスターサイズの揺らぎ

クラスターサイズの期待値に続いて、その揺らぎの大きさも

$$\begin{aligned} H_1'(x) &= G_1\left(H_1(x)\right) + xG_1'\left(H_1(x)\right)H_1'(x), \\ H_1''(x) &= \frac{2G_1'\left(H_1(x)\right)H_1'(1) + xG_1''\left(H_1(x)\right)H_1'(x)^2}{1 - xG_1'\left(H_1(x)\right)} \end{aligned} \tag{33}$$

などから同様に計算できる。転移点に近づくにつれ、クラスターサイズの平均だけでなくそのゆらぎの大きさが

$$\frac{\sigma_s}{\langle s\rangle} = \frac{\sqrt{\langle s^2\rangle - \langle s\rangle^2}}{\langle s\rangle} \sim H_1'(1)^{\frac{1}{2}} \tag{34}$$

と増大することを**確認してみよう**。

[7]「ランダムに選んだノードの属するクラスターのサイズ」

3.7　巨視的クラスター (giant component) のサイズ

クラスターサイズの発散点以上では、0 でない確率 S で無限大のサイズのクラスター（giant component、巨大成分とも呼ばれる）が出現する。この状況下でも有限サイズのクラスターの分布については母関数の手法は有効だが、全事象のうち S の割合のノードが巨視的クラスターに属するのであるからもはや "全確率" $H_0(1)$ は 1 ではなく

$$H_0(1) = 1 - S \tag{35}$$

となる。式（30）よりこの巨大成分の割合は

$$S = 1 - H_0(1) = 1 - G_0(H_1(1)) \tag{36}$$

であり、$H_1(1) = \xi$ は再帰的な式（27）の実解:

$$\xi = G_1(\xi) \tag{37}$$

として求められる。

特段の事情が無いかぎり、単調増加関数 $G_1(x)$ が転移点近傍で $x \to 1$ での振る舞いを変えることはなく $G_1(1) = 1$ なので、$\xi_0 = 1 \to S = 0$ のトリビアルな解はいつもある。また、定義より $G_1(x)$ は x の凸関数（下に凸）であって $0 \leq G_1(0) \leq 1$ であることから、転移点以下：$G_1'(1) \leq 1$ では上の方程式の解はこのトリビアルな解 $\xi_0 = 1$ に限られる。転移点の上では $G_1'(1) > 1$ で、かつ G_1 は凸関数なので、確かに $\xi < 1$ の解が出現する**（考えてみよう）**。

転移点の近傍少し上で $\xi < 1$ の解を $\xi = 1 - \epsilon$ として見積もると、

$$1 - \epsilon = G_1(1-\epsilon) \sim G_1(1) - G_1'(1)\epsilon + \frac{G_1''(1)}{2}\epsilon^2 \quad \to \quad \epsilon = 2\left(\frac{G_1'(1) - 1}{G_1''(1)}\right) \tag{38}$$

またこれより、転移点からの上側へのずれを $\delta = G_1'(1) - 1$ ($\ll 1$) と書けば、

$$S \sim G_0'(1)\epsilon \sim \delta \tag{39}$$

となる。

3.8　転移点上側近傍での有限クラスターサイズ

転移点より上での巨大成分以外の有限クラスターのサイズについてもこれまでと同様に母関数から計算できる。$H_0(1) = 1 - S \neq 1, \quad H_1(1) = \xi \neq 1$ であることに注意すると、有限クラスターのサイズの平均は

$$\langle s \rangle = \frac{H_0'(1)}{H_0(1)} = \frac{G_0(\xi) + G_0'(\xi)H_1'(1)}{1 - S}. \tag{40}$$

$H'1(1)$ を決める式 (28) についても同様に $\xi \neq 1$ であることに注意し、また転移点の上側近傍での ξ の 1 からのずれを与える式 (38) を用いると、

$$\langle s \rangle \sim G_0'(1)\delta^{-1}. \tag{41}$$

つまり、臨界点の上側でも有限サイズのクラスターの平均は下側と同様の発散をすることが分かる**（計算してみよう）**。転移点の上下側をまとめれば次のように書ける:

$$\langle s \rangle = G_0'(1)\left|1 - G_1'(1)\right|^{-1}. \tag{42}$$

3.9　転移点近傍での有限クラスターのサイズ分布

転移点近傍でクラスターサイズの平均とその分散が発散することを見たが、このときクラスターサイズの大きい方での漸近形はべき分布になることも母関数から示せる。

母関数の一般的性質 (viii) から、クラスターサイズがべき分布を持つことはその母関数 $H_0(x)$ の $x \to 1$ での特異性に反映される。また、式（27), (30）より、$H_0(x)$ の特異性は $H_1(x)$ の特異性と対応している。$H_1(x)$ についても閉じた形の式は無いが、その逆関数：

$$x = H_1^{-1}(y) \tag{43}$$

を考えると、これについては式（27）より

$$H_1^{-1}(y) = \frac{y}{G_1(y)} \tag{44}$$

と閉じた形の式が得られる。$H_1(x)$ の特異点は $H_1^{-1}(y)$ の傾きが 0 となる点だから、

$$G_1(y_*) - y_* G_1'(y_*) = 0. \tag{45}$$

転移点直上では、上で求めたように $G_1(1) = G_1'(1) = 1$ であるから $y_* = 1$ であることが確かめられる。式（44）より $H_1^{-1}(x)$ を 1 の周りで展開すると、

$$H_1^{-1}(1+\epsilon) = 1 - \frac{1}{2} G_1''(1)\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{46}$$

が得られる。これはつまり、

$$H_0(x) \sim H_1(x) \sim 1 + (1-x)^{\frac{1}{2}} \text{ as } x \to 1 \tag{47}$$

を意味する。

これより、転移点近傍での「任意に抽出したノードの属するクラスターのサイズ s の分布」の $k \to$ 大 での漸近形はべき分布であって、その指数は $\frac{3}{2}$ であることが分かる:

$$P(s) \sim s^{-\frac{3}{2}}. \tag{48}$$

また、「あるクラスターをランダムに選んだ場合のそのクラスターのサイズ n の分布」$M(n)$ は、

$$\tilde{M}(n) = Dn^{-\frac{5}{2}}. \tag{49}$$

のようにべき分布する。